Übungsstunde 1

Dan Philipp

Organisation

- Website: n.ethz.ch/~philippda/
- Mail: philippda@ethz.ch
- Schreibt mir gerne Mails mit Fragen oder wenn ihr etwas in der Übungsstunde sehen wollt

- Übungsserien: Jeden Freitag – Abgabe der Bonusaufgabe bis Donnerstag

Übungsstunden

- Kurze Besprechung Bonusaufgabe
- Fragen zur Übungsserie
- Theory Recap mit Beispielen
- Aufgaben ähnlich zu Serien/Prüfungsaufgaben

Tipps

- Fast keiner schafft alle Aufgaben – aber versucht es
- Stellt Fragen!
- Beweise zu können ist sehr wichtig – schaut die Musterlösung an
- Seid immer sehr präzise – ihr dürft normalerweise nur verwenden was im Skript steht
- Wenn ihr Zeit habt: Lest euch vor der Vorlesung die Teile im Skript durch

Theory Recap

Einführung

Mathematische Aussage:

- Klar definiert, entweder wahr oder falsch
- S = „3 ist eine Primzahl“,
  T = „5 ist gerade“,
  U = „Wenn m ungerade ist, dann ist m^2 gerade“

Implikation ⇒:

- $S \Rightarrow$ T ist wahr in drei Fällen:

1. $S\ falsch, T\ falsch$
2. $S\ falsch, T\ wahr$
3. $S\ wahr, T\ wahr$

Beweise – zwei Beispiele

Aussage: Die Summe von zwei ungeraden Zahlen ist gerade.

Die Aussage ist wahr. **Beweis**:

Seien a und b zwei ungerade Zahlen.

$\Rightarrow$ Für ein k und ein l gilt: $a = 2k + 1, b = 2l + 1$

$\Rightarrow$ Für die Summe gilt: $a + b = 2k + 1 + 2l + 1$

$\Rightarrow a + b = 2k + 2l + 2 = 2(k + l + 1)$

$\Rightarrow$ Die Summe $a + b$ ist gerade

Aussage: m ist durch 10 teilbar $\Rightarrow$ m ist durch 4 teilbar

Die Aussage ist falsch. **Beweis**:

Gegenbeispiel: $m = 30$

30 ist durch 10 teilbar, jedoch ist 30 nicht durch 4 teilbar. Somit ist die Implikation falsch.

Aussagenlogik

- Wir betrachten nun Formeln ($\neq$ Aussage)
- Formeln bestehen aus Symbolen (z.B. A, B), logischen Operatoren und Klammern
- Beispiel: $(A \to B) \ \land \neg C$

Wahrheitstabellen

$$(A \to B) \land \neg C$$

A	B	C	$A \to B$	$\neg C$	$(A \to B) \land \neg C$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	0

Aufgaben

Sei A=„Affe sitzt auf dem Baum“ und B=„Affe isst eine Banane“.

a) Was bedeuten die Formeln:
   - $\neg A \vee B$
   - $B \rightarrow \neg A$

b) Wie kann man folgenden Satz als Formel ausdrücken?
   „Genau dann wenn der Affe auf dem Baum sitzt, isst er eine Banane“

Aufgabe 1

a) $\neg A \vee B$: Der Affe sitzt nicht auf dem Baum oder isst eine Banane

$B \rightarrow \neg A$: Wenn der Affe eine Banane isst, sitzt er nicht auf dem Baum

b) Wir können den Satz umformulieren: Der Affe sitzt nicht auf dem Baum und isst keine Banane oder der Affe sitzt auf dem Baum und isst eine Banane.

So ist es einfacher eine Formel zu finden: $(\neg A \wedge \neg B) \vee (A \wedge B)$

Aufgabe

Zeige oder widerlege, dass F und G äquivalent sind.

$F = (A \to B) \land \neg B,\ G = \neg(A \lor B)$

1. Möglichkeit: Wahrheitstabellen

Aufgabe 2

A	B	$A \to B$	$\neg B$	$\underbrace{(A \to B) \land \neg B}_{F}$	$A \lor B$	$\underbrace{\neg(A \lor B)}_{G}$
0	0	1	1	1	0	1
0	1	1	0	0	1	0
1	0	0	1	0	1	0
1	1	1	0	0	1	0

Die Wahrheitstabellen von F und G sind äquivalent, somit gilt $F \equiv G$.

Aufgaben

1.6 Proving Logical Equivalence using Equivalence Transformations ($\star\star$)

Consider the formulas

$$\begin{aligned} F &= (C \wedge A) \vee ((B \rightarrow A) \wedge \neg C) \quad \text{and} \\ G &= A \vee \neg(B \vee C). \end{aligned}$$

Prove the statement $F \equiv G$ by using equivalence transformations.

Expectation. Your proof should be in the form of a sequence of *at most* 16 steps, where each step consists of applying the definition of $\rightarrow$ (that is $F \rightarrow G \equiv \neg F \vee G$), one of the rules given in Lemma 2.1 of the lecture notes[1], or one of the following rules: $F \wedge \neg F \equiv \bot$, $F \wedge \bot \equiv \bot$, $F \vee \bot \equiv F$, $F \vee \neg F \equiv \top$, $F \wedge \top \equiv F$, and $F \vee \top \equiv \top$. For this exercise, associativity is to be applied as in Lemma 2.1 *3)*. Each step of your proof should apply a *single* rule *once* and state *which* rule was applied.

Lemma 2.1.

1) $A \wedge A \equiv A$ *and* $A \vee A \equiv A$ *(idempotence);*
2) $A \wedge B \equiv B \wedge A$ *and* $A \vee B \equiv B \vee A$ *(commutativity of* $\wedge$ *and* $\vee$*);*
3) $(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$ *and* $(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$ *(associativity)*
4) $A \wedge (A \vee B) \equiv A$ *and* $A \vee (A \wedge B) \equiv A$ *(absorption);*
5) $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ *(first distributive law);*
6) $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ *(second distributive law);*
7) $\neg\neg A \equiv A$ *(double negation);*
8) $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$ *and* $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$ *(de Morgan's rules)*

2. Äquivalenzumformung

Aufgabe 3

$$
\begin{aligned}
F &= (C \land A) \lor ((B \to A) \land \neg C) \\
&\equiv (C \land A) \lor ((\neg B \lor A) \land \neg C) && (\text{Def.} \to) \\
&\equiv (C \land A) \lor (\neg C \land (\neg B \lor A)) && (\text{commutativity of } \land) \\
&\equiv (C \land A) \lor ((\neg C \land \neg B) \lor (\neg C \land A)) && (\text{first distributive law}) \\
&\equiv (C \land A) \lor ((\neg C \land A) \lor (\neg C \land \neg B)) && (\text{commutativity of } \lor) \\
&\equiv ((C \land A) \lor (\neg C \land A)) \lor (\neg C \land \neg B) && (\text{associativity}) \\
&\equiv ((A \land C) \lor (\neg C \land A)) \lor (\neg C \land \neg B) && (\text{commutativity of } \land) \\
&\equiv ((A \land C) \lor (A \land \neg C)) \lor (\neg C \land \neg B) && (\quad " \quad) \\
&\equiv (A \land (C \lor \neg C)) \lor (\neg C \land \neg B) && (\text{first distributive law}) \\
&\equiv (A \land T) \lor (\neg C \land \neg B) && (F \lor \neg F \equiv T) \\
&\equiv A \lor (\neg C \land \neg B) && (F \land T \equiv F) \\
&\equiv A \lor \neg (C \lor B) && (\text{de Morgan}) \\
&\equiv A \lor \neg (B \lor C) && (\text{commutativity of } \lor)
\end{aligned}
$$

Aufgaben

Wir definieren folgenden neuen Operator $\circ$:

A	B	$A \circ B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Beweise oder widerlege, dass $\neg(A \circ (B \wedge A)) \equiv \neg A \wedge \neg B$ gilt.

Aufgabe 4

Wahrheitstabelle:

A	B	$B \land A$	$A \circ (B \land A)$	$\neg(A \circ (B \land A))$	$\neg A \land \neg B$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	0	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	1	0

Die Wahrheitstabellen der Formeln stimmen nicht überein, somit gilt die Aussage nicht.

Weitere Aufgabe (Bonus Woche 2 von 2023)

2.3 Simplifying a Formula ($\star$) *(8 Points)*

Consider the propositional formula

$$F = ((\neg A \vee \neg B) \rightarrow (A \wedge \neg B)) \wedge (C \vee A)$$

Give a formula G that is equivalent to F, but in which each atomic formula A, B, and C appears at most once. *Prove* that $F \equiv G$ by providing a sequence of equivalence transformations with *at most* 9 steps.

Expectation. Your proof should be in the form of a sequence of steps, where each step consists of applying the definition of $\rightarrow$ (that is $F \rightarrow G \equiv \neg F \vee G$), one of the rules given in Lemma 2.1 of the lecture notes[1], or one of the following rules: $F \wedge \neg F \equiv \bot$, $F \wedge \bot \equiv \bot$, $F \vee \bot \equiv F$, $F \vee \neg F \equiv \top$, $F \wedge \top \equiv F$, and $F \vee \top \equiv \top$. For this exercise, associativity is to be applied as in Lemma 2.1 *3)*. Each step of your proof should apply a *single* rule *once* and state *which* rule was applied.

Lösung

2.3 Simplifying a Formula

We choose the formula $G = A$. In the following, we prove that $F \equiv G$:

$$
\begin{aligned}
& ((\neg A \vee \neg B) \rightarrow (A \wedge \neg B)) \wedge (C \vee A) && \\
\equiv\ & (\neg(\neg A \vee \neg B) \vee (A \wedge \neg B)) \wedge (C \vee A) && \text{(definition of } \rightarrow\text{)} \\
\equiv\ & (((\neg\neg A) \wedge (\neg\neg B)) \vee (A \wedge \neg B)) \wedge (C \vee A) && \text{(de Morgan's Rules)} \\
\equiv\ & ((A \wedge (\neg\neg B)) \vee (A \wedge \neg B)) \wedge (C \vee A) && \text{(double negation)} \\
\equiv\ & ((A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)) \wedge (C \vee A) && \text{(double negation)} \\
\equiv\ & (A \wedge (B \vee \neg B)) \wedge (C \vee A) && \text{(first distributive law)} \\
\equiv\ & (A \wedge \top) \wedge (C \vee A) && (F \vee \neg F \equiv \top) \\
\equiv\ & A \wedge (C \vee A) && (A \wedge \top \equiv A) \\
\equiv\ & A \wedge (A \vee C) && \text{(commutativity of } \vee\text{)} \\
\equiv\ & A && \text{(absorption)}
\end{aligned}
$$